الوحدة 05 الإحصاء

الكفاءات القاعدية

حساب الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية وتفسيره

معرفة تحديد وتفسير الربعيين الأدنى والأعلى Q_1 و Q_2.

إنشاء وتفسير مخطط بالعلبة

تعيين الإنحراف الربعي لسلسلة إحصائية

تصميم الدرس

الأنشطة

1/ سلاسل إحصائية وتمثيلاتها:

2/ خواص الوسط الحسابي:

3/ السلاسل الزمنية:

4/ تشتت القيم بالنسبة إلى الوسط الحسابي: التباين والإنحراف المعياري:

5/ الربعيات

تمارين ومشكلات حول الإحصاء

http://www.onefd.edu.dz

جميع الحقوق محفوظة ©

الأنشطة

النشاط 01 : خواص الوسط الحسابي

- **المعطيات والأسئلة:**

يتكون قسم من 30 تلميذا: 18 بنتا و12 ولدا في اختبار في الرياضيات كانت العلامات كالتالي:

علامة البنات: 16-14-13-13-11-11-11-10-10-9-9-9-8-8-8-7-7-6

علامات الأولاد: 15-14-14-12-12-15-11-11-11-13-8-5.

1) أ نشيء جداول إحصائية تبرز فيها التكرارات والتوترات واحد يمثل سلسلة علامات البنات والثاني يمثل سلسلة علامات الأولاد والثالث يمثل سلسلة علامات جميع تلاميذ القسم.

2) أحسب $\bar{x}$ معدل علامات البنات و$\bar{y}$ معدل علامات الأولاد و$\bar{x}$ معدل القسم.

3) إذا قرر الأستاذ أن يضيف نقطتين إلى علامة كل واحدة من البنات فكم يصبح معدل علامات البنات.

4) إذا قرر الأستاذ أن يضرب في 1,25 علامة كل واحد من الأولاد فكم يصبح معدل علامات الأولاد ؟

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- **الأجوبة والملاحظات:**

1 الجدول الممثل لسلة علامات البنات:

العلامات (x_i)	6	7	8	9	10	11	13	14	16
التكرارات (n_i)	1	2	3	3	2	3	2	1	1
التواترات (f_i)	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

- الجدول الممثل لسلة علامات الأولاد:

العلامات	5	8	11	12	13	14	15
التكرارات	1	1	3	2	1	2	2
التوترات	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

- الجدول الممثل لسلة علامات جميع تلاميذ القسم:

العلامات	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
التكرارات	1	1	2	4	3	2	6	2	3	3	2	1
التوترات	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$

2 حسب التعريف:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots + n_k}$$

منه: $$\bar{x} = \frac{1.6 + 2.7 + 3.8 + 3.9 + 2.10 + 3.11 + 2.13 + 1.14 + 1.16}{1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1}$$

إذن: $\bar{x} = 10$ (الحسابات بالآلة)

بصفة مماثلة نجد: $\bar{y} = 11,75$ و $\bar{x} = 10,7$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

3 إذا أضاف الأستاذ نقطتين إلى علامة كل واحدة من البنات فإن معدل علامات البنات وليكن $\bar{x}$ يكون:

$$\bar{x}'=\frac{1.(6+2)+2.(7+2)+3.(8+2)+3.(9+2)+2.(10+2)+3.(11+2)+2.(13+2)+1.(14+2)+1.(16+2)}{18}$$

أي:

$$\bar{x}'=\frac{1.6+2.7+3.8+3.9+2.10+3.11+2.13+1.14+1.16+2(1+2+3+3+2+3+2+1+1)}{18}$$

أي: $\bar{x}'=\bar{x}+2$ أي: $\bar{x}'=12$

4 إذا ضرب الأستاذ علامة كل واحد من الأولاد في 1,25 معدل علامات الأولاد وليكن $\bar{y}'$

$$\bar{y}'=\frac{1(1,25.5)+1.(1,25\times 8)+3(1,25.11)+2(1,25\times 12)+1(1,25\times 13)+2(1,25\times 14)+2(1,25\times 15)}{18}$$

أي:

$$\bar{y}'=1,25\left(\frac{1.5+1.8+3.11+2.12+1.13+2.14+2.15}{18}\right)$$

أي: $\bar{y}'=1,25\times\bar{y}$ أي: $\bar{y}'=14,6875$

¶ ملاحظة:

1 معدل علامات البنات 10، عدد البنات 18

معدل علامات الأولاد 11،75 عدد الأولاد 12

معدل القسم 10،7 عدد تلاميذ القسم 12+18

ونلاحظ: $10,7=\frac{12.11,75+18.10}{12+18}$

2 من خلال (3) و(4)

عندما أضفنا 2 إلى كل علامة المعدل "الجديد" هو ("المعدل القديم" +2)

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

عندما ضربنا كل علامة في 1،25 المعدل الجديد هو جداء المعدل "القديم في" 1،25

3 لدينا:

$$\bar{x} = \frac{1.6 + 2.7 + 3.8 + 3.9 + 2.10 + 3.11 + 2.13 + 1.14 + 1.16}{18}$$

أي:

$$\bar{x} = \frac{1}{18}.6 + \frac{2}{18}.7 + \frac{3}{18}.8 + \frac{3}{18}.9 + \frac{2}{18}.10 + \frac{3}{18}.11 + \frac{2}{18}.13 + \frac{1}{18}.14 + \frac{1}{18}.16$$

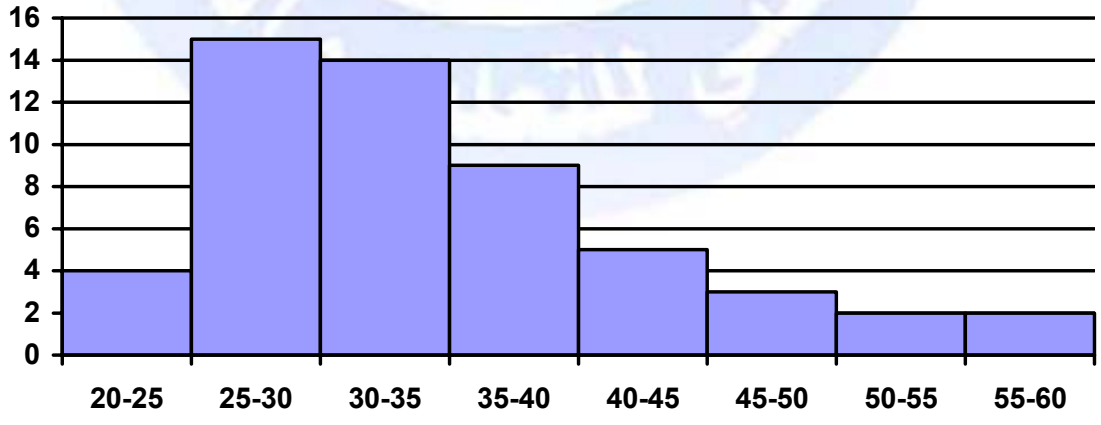
(باستعمال التواترات) $\bar{x} = f_1.x_1 + f_2.x_2 + \ldots\ldots + f_p.x_p$

وهذه الملاحظات تبرز خواص للمتوسط الحسابي.

النشاط 02 : تمثيل سلسلة إحصائية بمدرج تكراري

- **المعطيات والأسئلة :**

في الشكل (a) الموالي، المدرج التكراري الممثل لتوزيع الأعمار، بالسنوات، لعمال مؤسسة.



الشكل (a)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

1 إشرح طريقة التي اعتمد عليها الإنشاء الشكل (a) ثم أنشيء جدولا إحصائيا يمثل السلسلة الإحصائية المقترحة.

2 قصد تقليص عدد الفئات، نغير تنظيم القيم

أ- أكمل الجدول (b) التالي:

فئات الأعمار	]20,25[	]25,35[	]35,45[	]45;60[
عدد العمال				

الجدول (b)

ب-باستعمال معلم مثل السابق، مثل حدود الفئات الجديدة على محور الفواصل ثم أنشيء مستطيلات بحيث تكون مساحات هذه المستطيلات متناسبة مع تكرارات الفئات على الترتيب وبحيث يكون "إرتفاع" المستطيل المنشأ على القطعة الممثلة للفئة]20,25] يساوي 4.

- **الأجوبة والملاحظات:**

1 أطوال الفئات متساوية وبالتالي، وحسب الطريقة المعتمدة في السنة الأولى، "إرتفاع" مستطيل "مبني" على قطعة ممثلة لفئة يساوي تكرار هذه الفئة.

الجدول الإحصائي الممثل للسلسلة الإحصائية الممثلة بالمدرج التكراري في الشكل (a) هو كما يلي:

الفئات	]20,25[	]25,30[	]30,35[	]35,40[	]40,45[	]45,50[	]50,55[	]55,60[
التكرارات	4	13	12	9	5	3	2	2

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

2 إعتمادا على التنظيم "الجديد" والمعطيات يكمل الجدول (b) كما يلي:

الفئات	$[20,25[$	$[25,35[$	$[35,45[$	$[45;60[$
التكرارات	4	25	14	7

أ - ليكن Q_4, Q_3, Q_2, Q_1 المستطيلات المنشئة على القطع المستقيمة الممثلة للفئات $]20,25]$، $]25,30]$، $]35,45]$، $[45,60]$ على الترتيب ولتكن h_4, h_3, h_2, h_1 الإرتفاعات المقدرة في نفس الوحدة للمستطيلات R_4, R_3, R_2, R_1 على الترتيب، مساحات R_3, R_2, R_2, R_1 - مقدرة في نفس الوحدة - هي $h_4(60-45), h_3(45-35), h_2(35-25), h_1(25-20)$ على الترتيب وحتى تكون هذه المساحات متناسبة مع تكرارات الفئات، على الترتيب، يلزم ويكفي أن يكون: $\frac{h_4(25-20)}{4} = \frac{h_3(35-25)}{25} = \frac{h_2(45-35)}{14} = \frac{h_1(60-45)}{7}$

أي: $\frac{4.5}{4} = \frac{10h_2}{25} = \frac{10h_3}{14} = \frac{15h_{41}}{7}$ (لأن السؤال يأخذ: $h_1 = 4$)

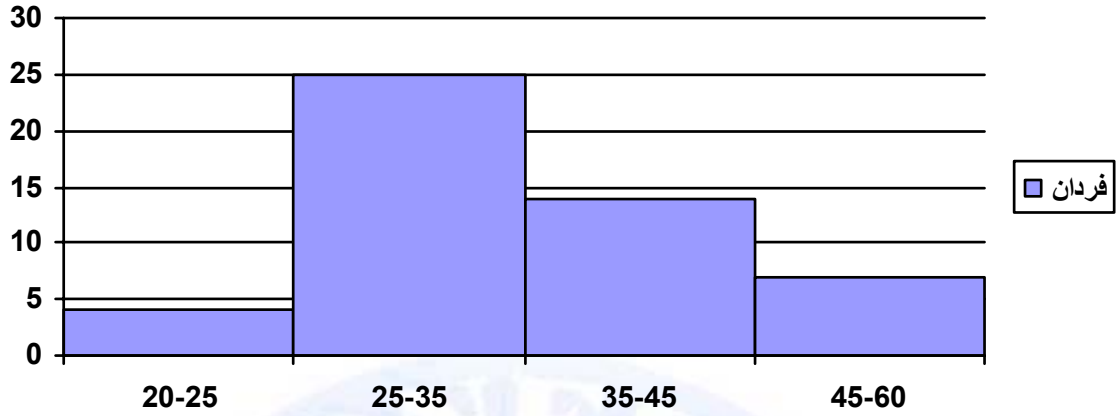
أي: $h_2 = 25 \times \frac{5}{10}, h_3 = 14 \times \frac{5}{10}, h_4 = 7 \times \frac{5}{15}$

أي: $h_4 = \frac{7}{3}$ ، $h_3 = 7$ ، $h_2 = \frac{25}{2}$

منه الشكل:

السلم:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



التحقق: في الشكل إذا قدرنا المساحات بالسنتيمتر المربع:

مساحة R_1 تساوي 2، مساحة R_2 تساوي 12,5، مساحة R_3 تساوي 7، مساحة R_4 تساوي 3,5

ولدينا: $\frac{3,5}{7}=\frac{7}{14}=\frac{12,5}{25}=\frac{2}{4}$

¶ ملاحظة:

إذا رمزنا بـ C_4,C_3,C_2,C_1 إلى الفئات وبـ $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ إلى أطوال هذه الفئات على الترتيب وبـ n_4,n_3,n_2,n_1 إلى تكرارات هذه الفئات على الترتيب، لدينا C_1 هي الفئة ذات أصغر طول وللحصول على h_i إرتفاع المستطيل المنشأ على القطعة الممثلة لفئة C_i استعملنا المساواة:

$$h_i = n_i \times \frac{\ell_1}{\ell_i}$$

النشاط 03: مقياس للتشتت بالنسبة إلى المتوسط الحسابي

- **المعطيات والأسئلة:**

شكل مشرف على مدرسة رياضية فريقين A و B ثم قام بقياس القامات- بالسنتيمتر- لإرضاء كل واحد من الفريقين فكانت النتائج كما يلي:

http://www.onefd.edu.dz

الفريق A : 165-167-168-171-174-175

الفريق B : 168-169-169-170-171-173

1 أحسب $\bar{x}$ المتوسط الحسابي لقامات أعضاء الفريق A و $\bar{y}$ المتوسط الحسابي لقامات أعضاء الفريق B.

2 أحسب كل واحد من العددين V_x و V_y حيث:

$$V_x = \frac{1(165-\bar{x})^2+1(167-\bar{x})^2+1(168-\bar{x})^2+1(171-\bar{x})^2+1(174-\bar{x})^2+1(175-\bar{x})^2}{6}$$

$$V_y = \frac{1(168-\bar{y})^2+2(169-\bar{y})^2+1(170-\bar{y})^2+1(171-\bar{y})^2+1(173-\bar{y})^2}{6}$$

3 ما هو الفريق الأكثر تجانسا من حيث القامة؟

- **الأجوبة والملاحظات:**

1 باستعمال تعريف المتوسط الحسابي (أو الآلة الحاسبة) نجد:

$\bar{y}=170$ و $\bar{x}=170$

2 $V_y=\frac{8}{3}$ و $V_x=\frac{40}{3}$ إذن: $V_y \simeq 2,67$ و $V_x \simeq 13,33$

3 V_x هو متوسط "مربعات (الفوارق بين قامات أعضاء الفريق A و $\bar{x}$)"

V_y هو متوسط "مربعات (الفوارق بين قامات أعضاء الفريق B و $\bar{y}$)"

ومن كون V_x أكبر من V_y يمكننا أن نقول أن تشتت قامات أعضاء الفريق A بالنسبة إلى القامة المتوسطة أكبر من تشتت قامات أعضاء الفريق B بالنسبة إلى القامة المتوسطة وبالتالي الفريق B أكثر تجانسا من الفريق A، من حيث القامة.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

¶ ملاحظة:

V_x يسمى تباين سلسلة قامات أعضاء الفريق A و $\sqrt{V_x}$ يسمى الإنحراف المعياري، لسلسلة قامات أعضاء الفريق A ، و V_y و $\sqrt{V_y}$ هما على الترتيب المتباين والانحراف المعياري لسلسلة قامات أعضاء الفريق B.

النشاط 04: مقياس للتشتت بالنسبة إلى الوسيط

- **المعطيات والأسئلة:**

سجلت الأعمار المقدرة بالسنوات لـ 35 شخصا يتابعون نوعا من الرسوم المتحركة فكانت النتائج-مرتبة تصاعديا- كما يلي:

10	11	11	11	12	12	13	13	14	14	17	17	20	23	24	25	27	6
32	32	35	36	37	38	38	38	40	41	42	46	46	46	47	50	50	

نريد تنظيم هذه المشاهدات وفق 4 فئات لها بالتقريب نفس التكرار

1) عين العمر me الذي يحقق "me هو أصغر عمر بحيث أعمار 50% على الأقل من الأفراد أصغر من أو يساوي me"

2) عين العمر Q_1 الذي يحقق "Q_1 هو أصغر عمر بحيث أعمار 25% على الأقل من الأفراد أقل من أو تساوي Q_1"

والعمر Q_3 الذي يحقق "Q_3 هو أصغر عمر بحيث أعمار 75% على الأقل من الأفراد أقل من أو تساوي Q_3"

- **الأجوبة والملاحظة:**

1) حسب التعريف me هو الوسيط للسلسلة الإحصائية المقترحة وبما أن عدد الأفراد هو 35 فإن me هو المشاهدة التي مرتبتها 18 منه: $me = 30$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

2) 25% من 35 هو $35\times\frac{25}{100}$ وهو 8,75 و75% من 35 هو $35\times\frac{75}{100}$

وهو 26,25 منه Q_1 هو المشاهدة ذات المرتبة 9 منه: $Q_1=14$

Q_3 هو المشاهدة ذات المرتبة 27 منه: $Q_3=40$ (بالاعتماد على المعطيات)

¶ ملاحظة:

1) قراءة للأسئلة باستعمال تعريف التكرار المجمع الصاعد تكون:

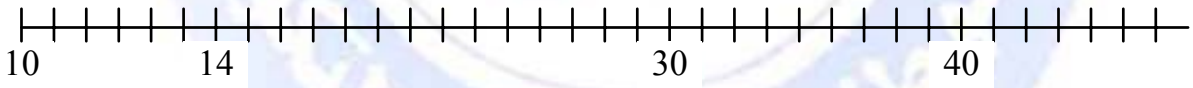
me هو أصغر قيمة تكرارها المجمع الصاعد أكبر من أو يساوي $0,5\times35$

Q_1 هو أصغر قيمة تكرارها المجمع الصاعد أكبر من أو يساوي $0,25\times35$

Q_3 هو أصغر قيمة تكرارها المجمع الصاعد أكبر من أو يساوي $0,75\times35$

2) يمكن تنظيم المشاهدات وفق الفئات $[10,14[$,$[14,30[$,$[30,40[$,$[40,50[$

بحيث يكون تواتر كل واحدة من هذه الفئات يساوي 0,25



2) Q_1 يسمى الربعي الأول لسلسة الأعمار وQ_3 يسمى الربعي الثالث لهذه السلسلة.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

1/ سلاسل إحصائية وتمثيلاتها:

أ- تعريف:

التمثيل البياني "مدرج" يستعمل في حالة سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي حيث قيم الميزة مصنفة وفق فئات $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$

للحصول على المدرج التكراري الممثل لهذه السلسلة، نحمل على المحور الأفقي (محور الفواصل) حدود الفئات ثم ننشيء مستطيلات متلاسقة $R_1 R_2, \ldots\ldots, R_p$ قواعدها السفلى القطع المستقيمة الممثلة للفئات $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$ على الترتيب وبحيث مساحات $R_1 R_2, \ldots\ldots, R_p$ متناسبة مع تكرارات $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$ على الترتيب. إتحاد المستطيلات $R_1 R_2, \ldots\ldots, R_p$ يسمى "مدرج تكراري ممثل للسلسلة الإحصائية"

ب- طريقة:

لتكن سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي حيث قيم الميزة مصنفة وفق الفئات $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$ ولتكن $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_p$ تكرارات الفئات $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$ على الترتيب ولتكن $\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_p$ أطوال الفئات $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$ على الترتيب.

إنشاء المدرج التكراري الممثل لهذه السلسلة نعتمد، عادة، ما يلي:

* إذا كان $\ell_1 = \ell_2 = \ldots\ldots = \ell_p$ أي إذا كانت الفئات متساوية الطول: "إرتفاع" المستطيل المنشيء على القطعة الممثلة لفئة C_i يساوي n_i، تكرار الفئة C_1 وهذا مهما تكن هذه الفئة.

جميع الحقوق محفوظة ©

* إذا كانت الفئات ليست متساوية الطول: نعتمد على فئة، ولتكن C_k لها أصغر طول ℓ_k (من بين أطوال الفئات)
وعندئذ يؤخذ h_i "إرتفاع" المستطيل المنشيء على القطعة الممثلة لفئة C_i وفق "الدستور" التالي: $h_i = n_i \times \frac{\ell_k}{\ell_i}$ (حيث ℓ_i طول C_i وn_i تكرار C_i) وهذا مهما تكن الفئة C_i.

¶ ملاحظة 1:

في جميع الحالات، قبل الشروع في إنشاء المدرج التكراري، نختار وحدة طول على المحور الأفقي ووحدة طول على المحور الشاقولي.

¶ ملاحظة 2:

يمكن إنشاء المدرج للتواترات...بإتباع نفس الطريقة مع استبدال التكرارات بالتواترات.

مثال: الجدول التالي يمثل توزيع علامات 24 تلميذا

فئات القيم	[0,5[	[5,9[	[9,12[	[12,18[
التكرارات	5	8	7	4

نلاحظ أن الفئات ليست متساوية الطول.

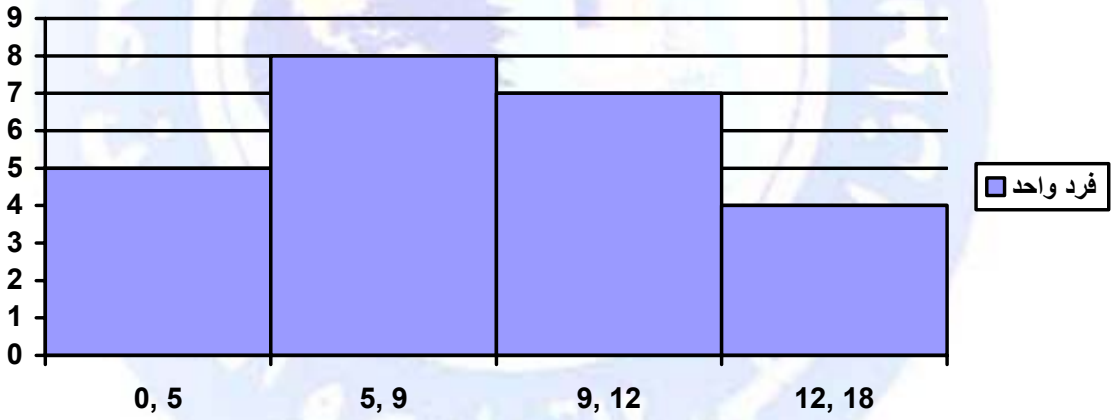
الفئة ذات أصغر طول هي C_3 حيث [9,12[وطولها ℓ_3 بحيث: $\ell_3 = 12 - 9$ أي: $\ell_3 = 3$

لإنشاء المدرج التكراري الممثل لهذه السلسة الإحصائية يمكن استعمال الجدول التالي حيث: $h_i = n_i \times \frac{3}{\ell_i}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

الفئة (C_i)	$[0,5[$	$[5,9[$	$[9,12[$	$[12,18[$
طول الفئة (ℓ_i)	$5-0=5$	$9-5=4$	$12-9=3$	$18-12=6$
تكرار الفئة (n_i)	5	8	7	4
إرتفاع المستطيل (h_i)	$5\times\frac{3}{5}=3$	$8\times\frac{3}{4}=6$	$7\times\frac{3}{3}=7$	$4\times\frac{3}{6}=2$

منه شكل المدرج التكراري الممثل للسلسلة



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2/ خواص الوسط الحسابي:

لتكن $(x_1,n_1),(x_2,n_2),.....(x_p,n_p)$ سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي $x_1,x_2,.....,x_p$ هي قيم الميزة و $n_1,n_2,.....,n_p$ هي تكرارات هذه القيم على الترتيب)

نذكر أن: تواتر قيمة x_i هو العدد f_i حيث: $f_i=\frac{n_i}{n}$ أين n_i تكرار القيمة x_i و $n=n_1+n_2+.....+n_p$

- الوسط الحسابي للسلسلة المعتبرة هو العدد $\bar{x}$ المعرف بما يلي:

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+.....+n_{1p}x_p}{n_1+n_2+.....+n_p}$$

ولدينا الخواص التالية:

خ1: $\bar{x}=f_1x_1,f_2x_2,.....,f_px_p$

خ2: هما يكن العدد الحقيقي α فإن الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية $(x_1+\alpha,n_1),(x_2+\alpha,n_2),.....,(x_p+\alpha,n_p)$ هو $(\bar{x}+\alpha)$

خ3: مهما يكن العدد الحقيقي فإن الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية $(\beta.x_1,n_1),(\beta.x_2,n_2),.....,(\beta.x_p,n_p)$ هو $\beta.\bar{x}$

خ4: الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي من الشكل: $(x_1,n_1),(x_2,n_2),.....,(x_p,n_p),(y_1,m_1),(y_2,m_2),.....,(y_R,m_R)$ هـ

و العدد الحقيقي $\bar{x}$ بحيث: $\bar{x}=\frac{n.\bar{x}+m.\bar{y}}{n+m}$

حيث: $\bar{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة $(x_1,n_1),(x_2,n_2),.....,(x_p,n_p)$

$\bar{y}$ الوسط الحسابي للسلسلة $(y_1,m_1),(y_2,m_2),.....,(y_R,m_R)$

$n=n_1+n_2+.....+n_p$ و $m=m_1+m_2+.....+m_p$

مثال:

في قسم دراسي يتكون من 15 ذكورا و25 إناثا إذا كان معدل أعمار الذكور هو 16 سنة ومعدل أعمار الإناث هو 17 سنة.

فإن معدل أعمار تلاميذ القسم المقدر بالسنوات هو: $\frac{15.16+25.17}{15+25}$

أي معدل أعمار تلاميذ القسم هو: 16,625 سنة.

3/ السلاسل الزمنية:

مفهوم السلسلة الزمنية:

تعريف:

سلسلة زمنية هي سلسلة مشاهدات سجلت في أوقات مختلفة

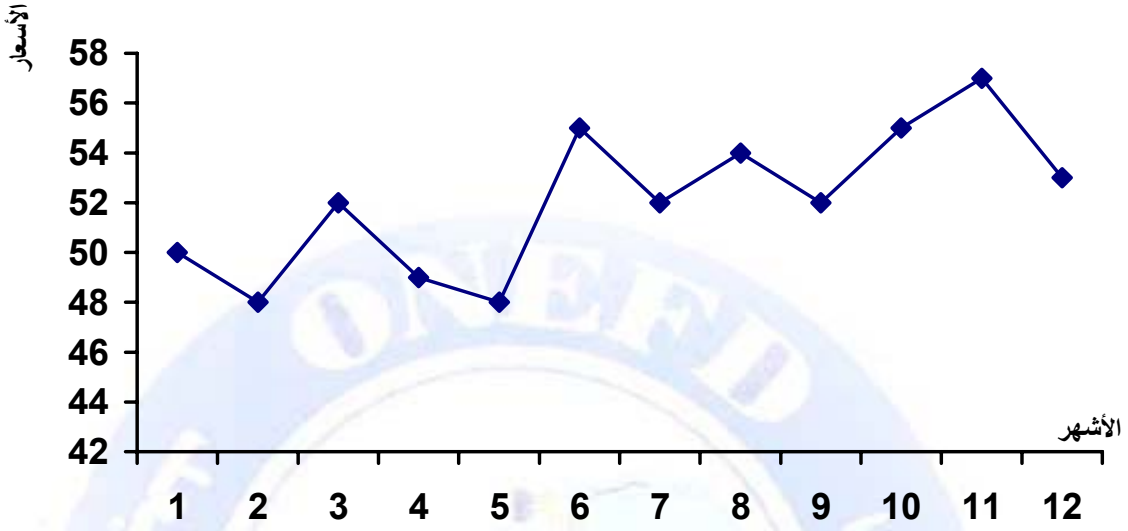
مثال:

سجل شخص السعر –المقدر بالدنانير- للكيلوغرام الواحد من منتوج ما وهذا خلال 12 شهرا متتابعة فتحصل على النتائج الملخصة في الجدول التالي:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
السعر	50	48	52	49	48	55	52	54	52	55	57	53

تمثل هذه السلسلة حسب البيان التالي:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



ون

لاحظ من هذا البيان أن السلسلة تمتاز بتذبذبات كثيرة ومعتبرة وهذا لا يمكن أن نحكم على "التوجه العام" لهذه السلسلة.

4/ تشتت القيم بالنسبة إلى الوسط الحسابي: التباين والإنحراف المعياري:

أ- تعريف التباين:

لتكن $(x_1,n_1),(x_2,n_2),.....,(x_p,n_p)$ سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي وليكن $\bar{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة: تباين هذه السلسلة هو العدد V المعرف كما يلي:

$$V=\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+.....+n_p(x_p-\bar{x})^2}{n_1+n_2+.....+n_p}$$

مثال:

فيما يلي علامات تلميذين A و B

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

علامات التلميذ A : 2,18,10,2,18

علامات التلميذ B : 8,10,9,11,12

إذا سمينا $\bar{x}_A$ و V_A الترتيب الوسط الحسابي والتباين لسلسلة علامات التلميذ A

و $\bar{x}_B$ و V_B الترتيب الوسط الحسابي والتباين لسلسلة علامات التلميذ B

لدينا: $\bar{x}_A = \frac{2\times 2+2\times 18+1.10}{5}$ منه: $\bar{x}_A = 10$

و $\bar{x}_B = \frac{1.8+1.9+1.10+1.11+1.12}{5}$ منه: $\bar{x}_B = 10$

و $V_A = \frac{2(2-10)^2+1(10-10)^2+2(18-10)^2}{5}$ منه: $V_A = 51,2$

و $V_B = \frac{(8-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2}{5}$ منه:

$V_B = 2$

¶ ملاحظة:

التباين يقيس "تشتت القيم بالنسبة إلى الوسط الحسابي" إذ كلما كان التباين كبيرا كلما كانت "مشتتة بالنسبة إلى الوسط الحسابي"

وكلما كان التباين صغيرا كلما كانت القيم "متركزة حول الوسط الحسابي"

هكذا في المثال أعلاه يمكننا أن نقول أن معدل التلميذ B يعبر على مستواه أكثر مما يعبر معدل التلميذ A على مستواه.

ب- خاصية:

لتكن $(x_1,n_1),(x_2,n_2),.....,(x_p,n_p)$ سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي وليكن $\bar{x}$ و V -على الترتيب- الوسط الحسابي والتباين لهذه السلسلة نضع $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ لدينا:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$V=\frac{1}{n}\left[n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+....+n_p(x_p-\bar{x})^2\right]$ حسب التعريف منه

بنشر المربعات:

$V=\frac{1}{n}\left[n_1(x_1{}^2+2x_1\bar{x}+\bar{x}^2)+n_2(x_2{}^2-x_2\bar{x}+\bar{x}^2)+....+n_p(x_p{}^2-2x_p\bar{x}+\bar{x}^2)\right]$ وبإ

نجاز حسابات (محكمة):

$V=\frac{1}{n}\left[(n_1+n_2+...+n_p(\bar{x})^2-2\bar{x}(n_1x_1+n_2x_2+..+n_px_p)+n_1x_1{}^2+n_2x_2{}^2+..+n_px_p{}^2\right]$ وب

ما أن:

$n_1+n_2+...+n_p=n$ و $n_1x_1+n_2x_2+...+n_px_p=n\bar{x}$

$V=\frac{1}{n}\left[n(\bar{x})^2-2\bar{x}(n.\bar{x})+n._1x_1{}^2+n_2x_2{}^2+...+n_px_p{}^2\right]$

وبعد النشر والتبسيط:

$V=-(\bar{x})^2+\frac{n_1x_1{}^2+n_2x_2{}^2+...+n_px_p{}^2}{n}$

منه:

المبرهنة:

لتكن $(x_1,n_1),(x_2,n_2),.....,(x_p,n_p)$ سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي وليكن $\bar{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة، التباين V لهذه السلسلة يعطى وفق الدستور: $V=\frac{n_1x_1{}^2+n_2x_2{}^2+...+n_px_p{}^2}{n}$ حيث:

$n=n_1+n_2+.....+n_p$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

¶ ملاحظة:

عند حساب تباين سلسلة إحصائية استعمال الدستور في المبرهنة الفارطة على العموم- أكثر بساطة من استعمال التعريف لأن في المبرهنة $\bar{x}$ مستعمل مرة واحدة فقط.

مثلا: إذا عدنا إلى علامات التلميذين A و B

$V_A = \frac{2.2^2 + 1.10^2 + 2.18^2}{5} - 10^2$ منه: $V_A = 51{,}2$

و $V_B = \frac{8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2}{5} - 10^2$ منه: $V_B = 2$

أ- تعريف الإنحراف المعياري، ترميز:

الإنحراف المعياري لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي هو العدد المرمز إليه بالرمز r والمعرف بالمساواة $r = \sqrt{v}$ حيث v تباين السلسلة.

¶ ملاحظة:

1) حاسبة علمية –مبرمجة في الوظيفة $stat(SD)$ تمكن من حساب الإنحراف المعياري باستعمال اللمسة r

2) في حالة قيم مصنف وفق فئات لحساب التباين أو الإنحراف المعياري تستعمل نفس النتائج السابقة مع تبديل القيم بمراكز الفئات، مثل ما هو الحال بالنسبة إلى الوسط الحسابي.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

5/ الربعيات

أ- تعريف، ترميز:

لتكن سلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي،الربعي الأول (أو الربعي الأدنى) هو قيمة الميزة المرمز إليها بالرمز Q_1 المعرفة كما يلي: إذا كتبت جميع المشاهدات مرتبة فإن Q_1 هي أصغر قيمة بحيث يكون 25%، على اقل، من المشاهدات أصغر من أو يساوي Q_1

الربعي الثالث (أو الربعي الأعلى) هو قيمة الميزة المرمز إليها بالرمز Q_3 هي أصغر قيمة بحيث يكون 75%، على الأقل، من المشاهدات أصغر من أو يساوي، المجال $[Q_1, Q_3]$ يسمى المجال الربعي والعدد $(Q_1 - Q_3)$ يسمى الإنحراف الربعي.

ب- طريقة لتعيين الربعيات

لتعيين الربعيين Q_1 و Q_3 لسلسلة إحصائية تكرارها الكلي (أي عدد أفرادها) N نرتب جميع المشاهدات (كل قيمة تكتب عدد مرات يساوي تكرارها) تصاعديا.

- إذا كان $\frac{N}{4}$ عددا طبيعيا

Q_1 هو المشاهدة ذات المرتبة $\frac{N}{4}$

Q_3 هو المشاهدة ذات المرتبة $\frac{3N}{4}$

- إذا كان $\frac{N}{4}$ ليس عددا طبيعيا

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

Q_1 هو المشاهدة ذات المرتبة الأكبر مباشرة من $\frac{N}{4}$

Q_3 هو المشاهدة ذات المرتبة الأكبر مباشرة من $\frac{3N}{4}$

مثالان:

1) لتكن السلسلة الإحصائية المعرفة بالمشاهدات المرتبة:

2-2،5-4-5-6،75-8-9-9-11،5-11،5-12-13

N عدد المشاهدات هو 12 و $\frac{N}{4}=3$ و $\frac{3N}{4}=9$

منه الربعي الأول هو المشاهدة ذات المرتبة 3 منه: $Q_1=4$

والربعي الثالث هو المشاهدة ذات المرتبة 9 منه: $Q_3=11,5$

2) لتكن السلسلة الإحصائية الممثلة بالجدول الإحصائي التالي:

القيم	8	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	25	26
التكرارات	15	45	20	70	50	10	5	5	30	16	6	3	3	13
التكرارات المجمعة الصاعدة	15	60	80	150	200	210	215	220	250	266	272	275	278	91

هنا N عدد المشاهدات هو 291 و $\frac{N}{4}=72,75$ و $\frac{3N}{4}=218,25$

و $\frac{N}{10}=29,1$ و $\frac{9N}{10}=261,9$

منه: Q_1 هو المشاهدة ذات المرتبة 73 وهو ضمن المشاهدات الـ 80 الأولى وليس ضمن المشاهدات الـ 60 الأولى منه: $Q_1=12$

Q_3 هو المشاهدة ذات المرتبة 219 وهو ضمن المشاهدات الـ 220 الأولى وليس ضمن المشاهدات الـ 215 الأولى منه: $Q_3=17$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ج- المخطط بالعلبة (أو المخطط بالربعيات):

المخطط بالعلبة (أو المخطط بالربعيات) هو نوع من التمثيل يمكن من تلخيص بياني لسلسلة إحصائية يسمح بدراسة لتوزيع قيم هذه السلسلة حول وسيطها.

يعتمد المخطط بالعلبة على خمسة قيم وهي:

أصغر قيمة للميزة (المرمز إليها عادة بالرمز $\min x$) الربعي الأول Q_1 الوسيط (الذي يسمى كذلك الربعي الثاني ويرمز إليه بالرمز Q_2 أو بالرمز med أو بالرمز me) الربعي الثالث Q_3 أكبر قيمة للميزة (المرمز إليها عادة بالرمز $Max\,x$)إنشاء المخطط بالعلبة الممثل لسلسلة إحصائية، نختار سلم وهذا بتمثيل قطعة مستقيمة "مدرجة" (أفقية أو شاقولية) بدايتها تمثل $\min x$ ونهايتها تمثل $Max\,x$ ثم نعلم النقط من هذه القطعة التي تمثل: Q_1، med وQ_3 ثم نكمل الشكل على النحو التالي:

(*) المستطيل يسمى "العلبة" والقطعتان خارجة تسميان "الشنبين" (Moustaches) أو "الرجلين" (Pattes) في حالة ما يكون التمثيل شاقولي.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

مثال:

إذا اعتبرنا السلسلة الإحصائية الممثلة بالجدول في المثال 2 فقرة (5) –ب- عدد الأفراد هو 291 وهو فردي منه الوسيط med هو المشاهدة التي مرتبتها 146 (145 مشاهدات قبل med و145 مشاهدات بعد med) ومنه med ضمن الـ 150 مشاهدات الأولى وليس ضمن الـ 80 مشاهدات الأولى منه: $med = 13$ والمخطط بالعلبة الممثل للسلسلة يكون كما يلي:

$\min x$	Q_1	med	Q_2	$Max\ x$
8	12	13	17	26

¶ ملاحظة:

- الإنحراف الربعي هو مقياس للتشتت يعكس توزيع 50% من المشاهدات حول الوسيط.
- مقاييس للموقع هي: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، الربعيات
- مقاييس للتشتت هي: المدى، التباين، الإنحراف المعياري، الإنحراف الربعي

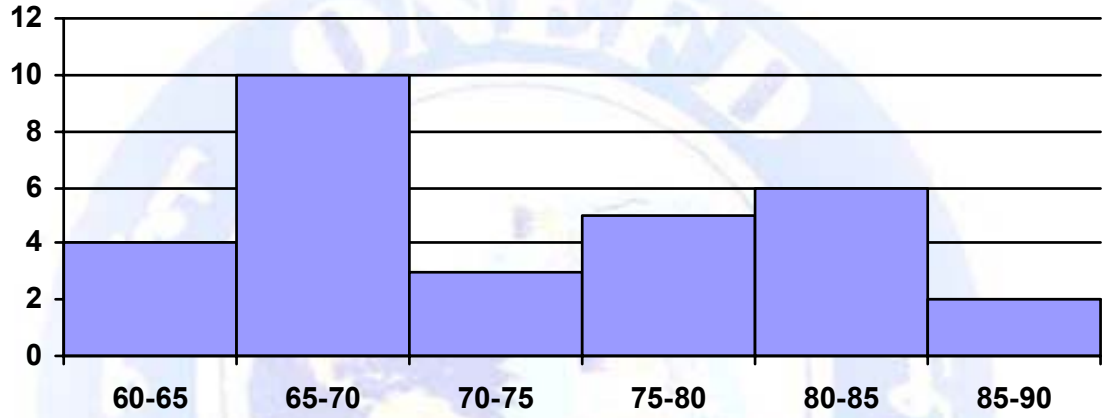
http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تمارين ومشكلات حول الإحصاء

التمرين 1:

في دار للعجزة أتتنا 30 عجوزا، وكان اهتمامنا بعمر (بسن) كل فرد من أفراد هذه العينة.

إليك المدرج التكراري الممثل لتوزيع الأعمار بالسنوات.



1) أ- اشرح الطريقة التي اعتمد عليها لإنشاء هذا المدرج التكراري.

ب- أنشيء جدولا إحصائيا يمثل السلسلة الإحصائية المقترحة

2) قصد الاهتمام أكثر، نريد تقليص عدد الفئات، لأجل ذلك

أ- أكمل الجدول التالي:

الفئات	]85,90[	]70,85[	]60,70[
عدد العجزة			

ب- لتكن S_3, S_2, S_1 مساحات المستطيلات المنشأة على القطع الممثلة للفئات]60,70[،]70,85[،]85,90[بهذا الترتيب.

أحسب S_3

أحسب S_1 و S_2 علما أن: $S_1 + S_2 = 140$ و $S_1 - S_2 = 0$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

باستعمال معلم كالسابق، مثل الفئات الجديدة على محور الفواصل ثم أنشيء مستطيلات تحقق المعطيات والنتائج المتعلقة بالفئات الجديدة.

التمرين 2:

في مؤسسة تعليمية، أخذنا 30 فردا منهم 10 تلاميذ و5 أساتذة و8 إداريين.
سألناهم عن عدد الكتب التي يطالعها كل منهم في السنة فكانت الأجوبة.

عدد الكتب التي يطالعها كل تلميذ: 5؛12؛0؛4؛0؛4؛0؛1؛6؛3

عدد الكتب التي يطالعها كل أستاذ: 3؛6؛4؛6؛12

عدد الكتب التي يطالعها كل إداري: 1؛10؛4؛3؛4؛0؛6؛2

1) أنشيء جدولا إحصائيا تبرر فيها التكرارات والتواترات بحيث:

أحد الجداول يمثل سلسلة عدد الكتب التي يطالعها التلاميذ والثاني يمثل سلسلة عدد الكتب التي يطالعها الأساتذة والثالث يمثل سلسلة عدد الكتب التي يطالعها الإداريون والرابع يمثل عدد الكتب للمجموعة كلها (الأفراد الـ 23).

2) أحسب كلا من $\bar{x}$ و$\bar{y}$ و$\bar{z}$ و$\bar{x}$ حيث:

$\bar{x}$ الوسط الحسابي لعدد الكتب التي يطالعها التلاميذ و$\bar{y}$ الوسط الحسابي لعدد الكتب التي يطالعها الأساتذة و$\bar{z}$ الوسط الحسابي لعدد الكتب التي يطالعها الإداريون و$\bar{x}$ الوسط الحسابي لعدد الكتب التي يطالعها أفراد المجموعة (أي الأفراد الـ 23).

3) أردنا تحفيز هذه المجموعة على المطالعة أكثر، لأجل ذلك ثم التفكير في عدة أساليب تحفيزية.

أ- الأسلوب التحفيزي الأول جعل كل فرد يتمكن من إضافة 3 كتب للمطالعة سنويا، عندئذ: ما هو معدل عدد الكتب التي يطالعها هؤلاء الأفراد في السنة

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

ب- الأسلوب التحفيزي الثاني جعل كل فرد يتمكن من مضاعفة عدد الكتب التي يطالعها في السنة مرتين، عندئذ.

ما هو معدل عدد الكتب التي يطالعها هؤلاء الأفراد في السنة.

التمرين 3:

قسم نهائي يحتوي على 8 بنات و8 ذكور أجرينا لهذا القسم اختبارا في الرياضيات بغية التحفيز، فكانت العلامات على 20 كالتالي:

علامات البنات: 14،20،11،07،11،15،17،11

علامات الذكور: 18،19،17،10،6،6،17،6

1) أحسب $\bar{x}$ المتوسط الحسابي لعلامات البنات وأحسب $\bar{y}$ المتوسط الحسابي لعلامات الذكور.

2) أحسب U_x تباين سلسلة علامات البنات ثم الإنحراف المعياري لهذه السلسلة.

3) أحسب V_y تباين سلسلة علامات الذكور ثم الإنحراف المعياري لهذه السلسلة.

4) حدد من بين المجموعتين المجموعة الأكثر تجانسا من حيث العلامات.

التمرين 4:

بعد إنتهاء بطولة كأس العالم لعام 2006، من بين الفرق المشاركة، أخذنا 7 فرق أوروبية و7 فرق من بقية العالم (أي الفرق التي ليست أوروبية)

فكان عدد المرات التي تأهلت فيها الفرق الأوروبية السبع وكذا فرق بقية العالم كالتالي:

الفرق الأوروبية: 8،9،9،2،10،11

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

فرق بقية العالم: 4،3،2،10،7،1

1) أحسب $\bar{x}$، المتوسط الحسابي لعدد مرات تأهل الفرق الأوروبية وأحسب $\bar{y}$، المتوسط الحسابي لعدد مرات تأهل فرق بقية العالم.

2) أحسب V_x تباين سلسلة عدد مرات تأهل الفرق الأوروبية ثم أحسب $\sqrt{V_x}$

3) أحسب V_y تباين سلسلة عدد مرات تأهل فرق بقية العالم ثم أحسب $\sqrt{V_y}$

4) ما هو تعليقك على النتائج الحسابية الموجودة.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 5:

في إحدى الولايات الجزائرية، أخذنا 30 ناجحا في بكالوريا 2006، وكان اهتمامنا بعلامات الرياضيات على 20 فكانت هذه العلامات- مدينة تنازليا- كما يلي:

20	19	19	17	17	17	16	16	15	14	14	14	14	13	13	12	11	11	10
10	10	10	9	9	9	8	8	8	7	7								

1) عين كل من: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، الربعيات.

2) عين كل من المدى التباين، الإنحراف المعياري، الإنحراف الربعي، الإنحراف العشري

3) أنشيء المخطط بالعلبة الممثل لهذه السلسلة.

4) نظم هذه المشاهدات وفق فئات، بحيث يكون تواتر كل واحدة من هذه الفئات يساوي 0,25

التمرين 6:

في مسابقة الدخول إلى المدرسة العليا للإدارة، بعد إجراء المسابقة، أخذت مجموعة من المترشحين بغية التعرف على معدلاتهم في المسابقة، فشكلها الجدول التالي:

المعدلات	7	7،5	9	10	11	11،5	12	14	16	16ن5
التكرارات	10	14	5	13	20	11	5	14	2	7

1) أكمل الجدول السابق بإعطاء التكرارات المجمعة الصاعدة.

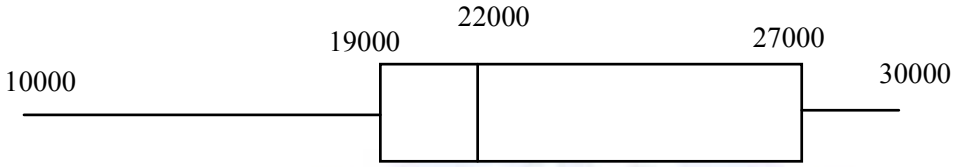
2) عين كلا من: $\min x$ أصغر قيمة للميزة، $\max x$ أكبر قيمة للميزة، Q_1 الربعي الأول، Med الوسيط، Q_3 الربعي الثالث.

3) أنشيء المخطط بالعلبة الممثل لهذه السلسلة الإحصائية.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 8:

المخطط بالعلبة – التالي- يمثل سلسلة الأجور بالدينار الجزائري لمجموعة من المواطنين.



1) عين كلا من: Me, Q_3, Q_1, D_9, D_1

2) قدم تعليق بالنسبة المئوية فيما يخص هذه السلسلة.

ملاحظة : لحل التمارين والمشكلاتحول الإحصاء يمكن الإعتماد على النشاطات الموجودة في الدرس

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©